

Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

E. A. Mityushov, N. E. Misyura, S. A. Berestova, Smooth movement of a rigid body in orientational space along the shortest path through the uniform lattice of the points on  $SO(3)$ , *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, 2017, Volume 27, Issue 1, 138–145

DOI: <https://doi.org/10.20537/vm170112>

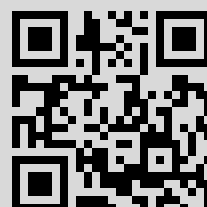
Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 213.142.35.54

July 20, 2019, 10:55:02



УДК 514.8, 519.688

© *Е. А. Митюшов, Н. Е. Мисюра, С. А. Берестова***ПЛАВНОЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА В ПРОСТРАНСТВЕ  
ОРИЕНТАЦИЙ ПО КРАТЧАЙШЕЙ ТРАЕКТОРИИ ЧЕРЕЗ УЗЛЫ  
ОДНОРОДНОЙ РЕШЕТКИ НА ГРУППЕ  $SO(3)$** 

Многие задачи управления движением и навигации, робототехники и компьютерной графики связаны с описанием вращения твердого тела в трехмерном пространстве. Для решения подобных задач дается конструктивное решение задачи о плавном перемещении твердого тела в пространстве ориентаций по кратчайшей траектории, проходящей через точки пространства, равномерно его заполняющие. Сферическому движению твердого тела ставится в соответствие движение точки по гиперсфере в четырехмерном пространстве по дугам большого радиуса, соединяющим вершины одного из правильных центросимметричных четырехмерных многогранников. Плавное движение обеспечивается выбором специальной нелинейной функции при интерполяции кватернионов, задающих положения вершин правильных многогранников. Для аналитического представления закона непрерывного движения используется оригинальное алгебраическое представление функции Хевисайда через линейную, квадратичную и иррациональную функции. Алгоритм плавного движения твердого тела через узлы однородной решетки на группе  $SO(3)$  иллюстрируется анимацией, выполненной в компьютерной программе MathCad. Предложенный метод позволяет в широких пределах менять временные интервалы межузельных перемещений, а также законы движения на этих интервалах.

*Ключевые слова:* дискретное распределение на  $SO(3)$ , кратчайшие траектории, четырехмерные многогранники, интерполяция кватернионов, функция Хевисайда.

DOI: [10.20537/vm170112](https://doi.org/10.20537/vm170112)

Многие задачи управления движением и навигации, робототехники и компьютерной графики связаны с описанием вращения твердого тела в трехмерном пространстве. Как известно, конфигурационным пространством этого вращения является группа Ли  $SO(3)$ . Положение твердого тела может быть однозначно определено с помощью кватернионов  $\lambda = \lambda_0 + \lambda_1 i + \lambda_2 j + \lambda_3 k$  с единичной нормой  $\lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 1$ . Они образуют группу  $Sp(1)$  ( $SO(3) \approx Sp(1)/\pm 1$ ). При этом трехмерная сфера единичного радиуса  $S^3$  двулиственным образом накрывает группу  $SO(3)$  — кватернионам  $\lambda$  и  $-\lambda$  соответствует один и тот же элемент из  $SO(3)$  [1,2]. Наглядной иллюстрацией этого служит получение плотности совместного распределения углов Эйлера при равновероятном вращении твердого тела из равномерного распределения точек на поверхности единичной гиперсферы, выполненное в работе [3].

Так как множество случайных равновероятных вращений может быть представлено множеством точек, случайным образом равномерно распределенных на поверхности трехмерной гиперсферы, то возможно перейти к равномерному дискретному распределению точек на гиперсфере и, как следствие, равномерному дискретному заполнению пространства вращений — ориентационного пространства. Для этого могут быть использованы правильные четырехмерные центросимметричные многогранники. Вершины этих многогранников, вписанных в трехмерную гиперсферу единичного радиуса, дадут дискретное равномерное распределение точек на гиперсфере и, соответственно, дискретный набор ориентаций, соответствующий равномерному заполнению пространства ориентаций.

При выполнении упорядочения вершин четырехмерных многогранников открывается путь к построению кратчайшей траектории в виде дуг большого радиуса, соединяющих эти вершины на поверхности единичной гиперсферы. Для построения закона плавного движения по соответствующей траектории в работе используется гладкая нелинейная интерполяция кватернионов.

### § 1. Дискретное распределение точек на гиперсфере в $\mathbb{R}^4$ и дискретные ориентации в $\mathbb{R}^3$

Существование равномерного распределения конечного числа точек на трехмерной гиперсфере в четырехмерном евклидовом пространстве доказывается существованием пяти центросимметричных правильных четырехмерных многогранников, вписанных в трехмерную гиперсферу единичного радиуса. Этими многогранниками являются: тессеракт (8), шестнадцатиячейник (16), двадцатичетырехячейник (24), шестисотячейник (600), шестисотячейник (120). В скобках указано число вершин.

При этом необходимо принимать во внимание факт двулистного накрытия трехмерной гиперсферы группы  $SO(3)$ , связанный с тождественностью кватернионов  $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$  и  $(-\lambda_0, -\lambda_1, -\lambda_2, -\lambda_3)$  [1, 4], а также свойства симметрии четырехмерных многогранников.

Таким образом, для моделирования дискретного набора ориентаций твердого тела, равномерно заполняющих ориентационное пространство, могут быть использованы вершины пяти правильных четырехмерных многогранников (тессеракта, шестнадцатиячейника, двадцатичетырехячейника, шестисотячейника) в совокупности с процедурой отбрасывания половины вершин по условию тождественности кватернионов  $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$  и  $(-\lambda_0, -\lambda_1, -\lambda_2, -\lambda_3)$ .

В качестве примера дискретного заполнения ориентационного пространства выбраны ориентации, соответствующие вершинам двадцатичетырехячейника с координатами  $(\pm 1, 0, 0, 0)$ ,  $(0, \pm 1, 0, 0)$ ,  $(0, 0, \pm 1, 0)$ ,  $(0, 0, 0, \pm 1)$ ,  $(\pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2})$  [5]. После отбрасывания зеркально симметричных вершин остаются двенадцать вершин и находятся соответствующие единичные кватернионы:  $1 - \lambda^{(1)} = (1, 0, 0, 0)$ ,  $2 - \lambda^{(2)} = (0, 1, 0, 0)$ ,  $3 - \lambda^{(3)} = (0, 0, 1, 0)$ ,  $4 - \lambda^{(4)} = (0, 0, 0, 1)$ ,  $5 - \lambda^{(5)} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ ,  $6 - \lambda^{(6)} = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ ,  $7 - \lambda^{(7)} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ ,  $8 - \lambda^{(8)} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ ,  $9 - \lambda^{(9)} = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ ,  $10 - \lambda^{(10)} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ ,  $11 - \lambda^{(11)} = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ ,  $12 - \lambda^{(12)} = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ .

Для упорядочения ориентаций, задаваемых этими кватернионами, определим угловые расстояния (таблица 1), задаваемые равенством

$$\vartheta_y = \arccos(\lambda^{(i)} \cdot \lambda^{(j)}),$$

где  $\lambda^{(i)} \cdot \lambda^{(j)} = \lambda_0^{(i)} \lambda_0^{(j)} + \lambda_1^{(i)} \lambda_1^{(j)} + \lambda_2^{(i)} \lambda_2^{(j)} + \lambda_3^{(i)} \lambda_3^{(j)}$  — скалярное произведение кватернионов.

**Таблица 1.** Угловые расстояния  $\vartheta_y$  между дискретными ориентациями

	$\lambda^{(1)}$	$\lambda^{(2)}$	$\lambda^{(3)}$	$\lambda^{(4)}$	$\lambda^{(5)}$	$\lambda^{(6)}$	$\lambda^{(7)}$	$\lambda^{(8)}$	$\lambda^{(9)}$	$\lambda^{(10)}$	$\lambda^{(11)}$	$\lambda^{(12)}$
$\lambda^{(1)}$	0											
$\lambda^{(2)}$	$\pi/2$	0										
$\lambda^{(3)}$	$\pi/2$	$\pi/2$	0									
$\lambda^{(4)}$	$\pi/2$	$\pi/2$	$\pi/2$	0								
$\lambda^{(5)}$	$\pi/3$	$\pi/3$	$\pi/3$	$\pi/3$	0							
$\lambda^{(6)}$	$\pi/3$	$2\pi/3$	$\pi/3$	$\pi/3$	$\pi/3$	0						
$\lambda^{(7)}$	$\pi/3$	$\pi/3$	$2\pi/3$	$\pi/3$	$\pi/3$	$\pi/2$	0					
$\lambda^{(8)}$	$\pi/3$	$\pi/3$	$\pi/3$	$2\pi/3$	$\pi/3$	$\pi/2$	$\pi/2$	0				
$\lambda^{(9)}$	$\pi/3$	$2\pi/3$	$2\pi/3$	$\pi/3$	$\pi/2$	$\pi/3$	$\pi/3$	$2\pi/3$	0			
$\lambda^{(10)}$	$\pi/3$	$\pi/3$	$2\pi/3$	$2\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$\pi/3$	$\pi/3$	$\pi/2$	0		
$\lambda^{(11)}$	$\pi/3$	$2\pi/3$	$\pi/3$	$2\pi/3$	$\pi/2$	$\pi/3$	$2\pi/3$	$\pi/3$	$\pi/2$	$\pi/2$	0	
$\lambda^{(12)}$	$\pi/3$	$2\pi/3$	$2\pi/3$	$2\pi/3$	$2\pi/3$	$\pi/2$	$\pi/2$	$\pi/2$	$\pi/3$	$\pi/3$	$\pi/3$	0

Из 39 916 800 маршрутов, соединяющих двенадцать выбранных вершин двадцатичеты-

рехячейника, можно отобрать двенадцать кратчайших. В дальнейшем используется маршрут

$$1 \rightarrow 12 \rightarrow 11 \rightarrow 3 \rightarrow 8 \rightarrow 10 \rightarrow 2 \rightarrow 7 \rightarrow 9 \rightarrow 6 \rightarrow 5 \rightarrow 4.$$

Как видно из таблицы 1, угловое расстояние между вершинами и соответствующими кватернионами в этом случае одинаковое и равно  $\pi/3$ .

## § 2. Интерполяция кватернионов и закон плавного перемещения твердого тела в пространстве ориентаций по кратчайшей траектории

Построение кратчайшей траектории в пространстве ориентаций осуществим набором дуг большого радиуса на поверхности единичной гиперболы, соединяющих выбранные вершины. Для построения закона плавного движения по соответствующей траектории используем гладкую нелинейную интерполяцию кватернионов, которая является обобщением метода сферической линейной интерполяции (*slerp*): [6]

$$\lambda(t) = \lambda^{(i)} \frac{\sin[\vartheta_y(1-f(t))]}{\sin(\vartheta_y)} + \lambda^{(j)} \frac{\sin[\vartheta_y f(t)]}{\sin(\vartheta_y)}, \quad f(t) = 6 \left(\frac{t}{T}\right)^5 - 15 \left(\frac{t}{T}\right)^4 + 10 \left(\frac{t}{T}\right)^3, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Здесь  $\lambda(t)$  — кватернионы, соответствующие точкам дуги большого радиуса на поверхности единичной гиперболы, которая соединяет вершины  $(i)$  и  $(j)$ ,  $T$  — временной интервал перемещения.

Кроме этого, для описания непрерывного плавного движения воспользуемся следующим алгебраическим представлением функции Хевисайда «ступенька вверх, ступенька вниз» [7]:

$$H_{ab}(t) = \frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{t-a}{\sqrt{(t-a)^2}} \cdot \frac{b-t}{\sqrt{(b-t)^2}} \right] = \begin{cases} 0, & \text{если } -\infty < t < a; \\ 1, & \text{если } a < t < b; \\ 0, & \text{если } b < t < +\infty. \end{cases}$$

Для удобства аналитического представления закона плавного движения твердого тела в ориентационном пространстве по кратчайшей траектории перенумеруем вершины двадцатичетырехячейника и соответствующие им кватернионы по правилу

$$\begin{aligned} 1 &\leftrightarrow 0, & 12 &\leftrightarrow 1, & 11 &\leftrightarrow 2, & 3 &\leftrightarrow 3, & 8 &\leftrightarrow 4, & 10 &\leftrightarrow 5, \\ 2 &\leftrightarrow 6, & 7 &\leftrightarrow 7, & 9 &\leftrightarrow 8, & 6 &\leftrightarrow 9, & 5 &\leftrightarrow 10, & 4 &\leftrightarrow 11. \end{aligned}$$

Тогда на отрезке  $t \in [0, T]$  по значениям кватернионов  $\lambda^{(k)} = \lambda^{(k)}(t_k)$  в узлах  $t_k$  сетки  $\Delta_{11} \in \{t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_{11} = T\}$  может быть построена следующая интерполирующая функция  $\lambda(t)$ :

$$\begin{aligned} \lambda(t) &= \frac{1}{\sqrt{3}} \sum_{k=0}^{11} \left[ 1 + \frac{t-t_k}{\sqrt{(t-t_k)^2}} \cdot \frac{t_{k+1}-t}{\sqrt{(t_{k+1}-t)^2}} \right] \times \\ &\times \left\{ \lambda^{(k)} \sin \left[ \frac{\pi}{3} (1-f_k(t)) \right] + \lambda^{(k+1)} \sin \left[ \frac{\pi}{3} f_k(t) \right] \right\}, \\ f_k(t) &= 6 \left( \frac{t-t_k}{t_{k+1}-t_k} \right)^5 - 15 \left( \frac{t-t_k}{t_{k+1}-t_k} \right)^4 + 10 \left( \frac{t-t_k}{t_{k+1}-t_k} \right)^3. \end{aligned} \quad (1)$$

Функциональная матрица поворота, записанная через координаты кватерниона (1), имеет вид

$$\mathbf{R}(t) = \begin{pmatrix} 1 - 2\lambda_2^2(t) - 2\lambda_3^2(t) & 2\lambda_1(t)\lambda_2(t) - 2\lambda_0(t)\lambda_3(t) & 2\lambda_1(t)\lambda_3(t) + 2\lambda_0(t)\lambda_2(t) \\ 2\lambda_1(t)\lambda_2(t) + 2\lambda_0(t)\lambda_3(t) & 1 - 2\lambda_3^2(t) - 2\lambda_1^2(t) & 2\lambda_2(t)\lambda_3(t) - 2\lambda_0(t)\lambda_1(t) \\ 2\lambda_1(t)\lambda_3(t) - 2\lambda_0(t)\lambda_2(t) & 2\lambda_2(t)\lambda_3(t) + 2\lambda_0(t)\lambda_1(t) & 1 - 2\lambda_1^2(t) - 2\lambda_2^2(t) \end{pmatrix},$$

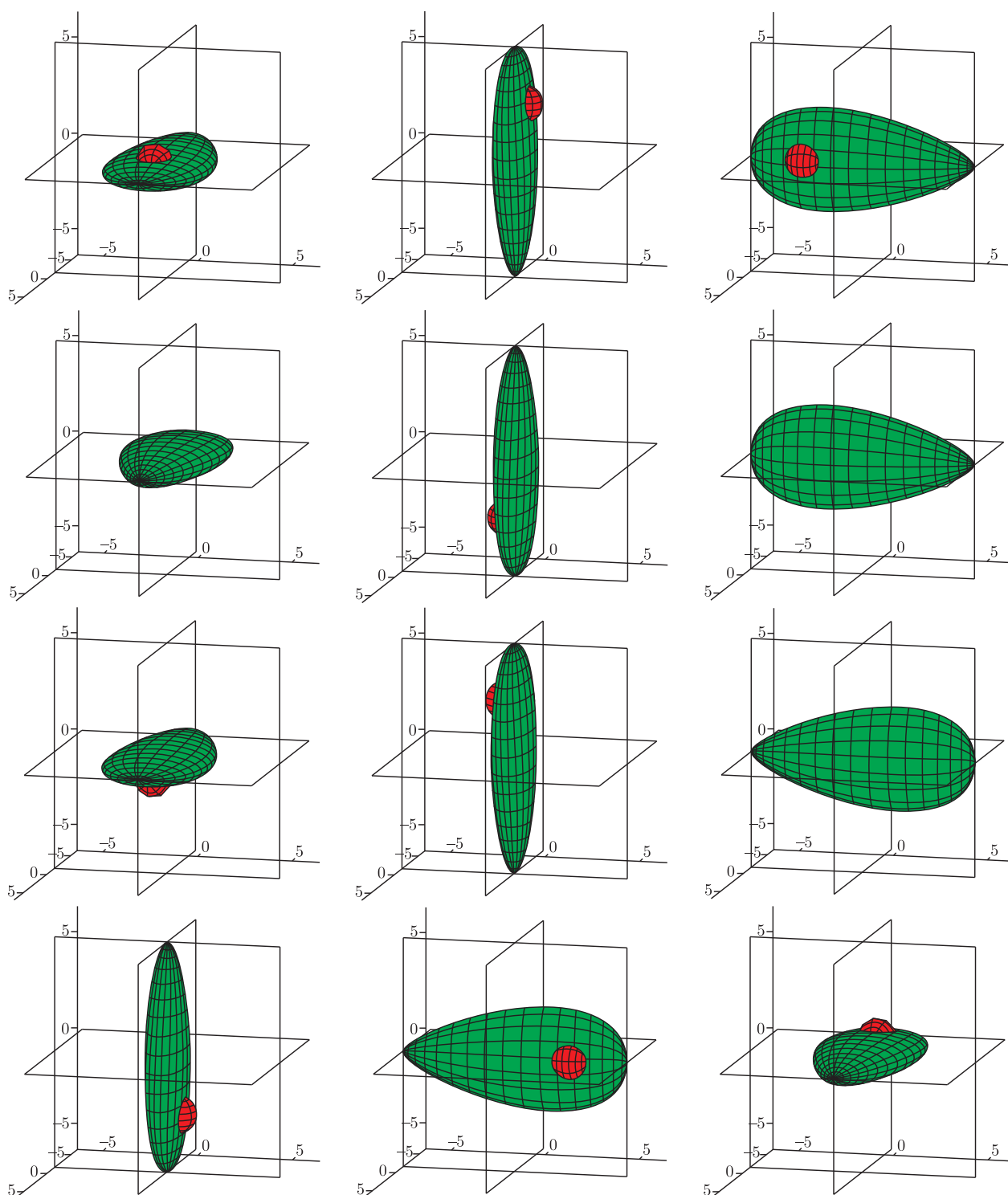
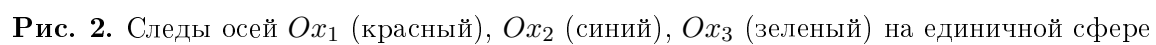


Рис. 1. Кадры двенадцати ориентаций твердого тела, равномерно заполняющих ориентационное пространство, из анимации плавного движения по кратчайшей траектории [8]



и закон плавного перемещения точек твердого тела в пространстве ориентаций по кратчайшей траектории, проходящей через точки пространства, равномерно его заполняющие, записывается преобразованием

$$\mathbf{r} = \mathbf{R}(t)\mathbf{r}_0,$$

где  $\mathbf{r}_0$  — радиус-вектор некоторой фиксированной точки твердого тела в начальный момент движения.

### § 3. Иллюстрации плавных движений по кратчайшей траектории

Предложенный алгоритм нахождения закона плавного движения по кратчайшей траектории иллюстрируется с помощью 3D-анимации, выполненной с использованием компьютерной программы MathCad [8]. На рис. 1 последовательно представлены дискретные ориентации твердого тела, соответствующие значениям кватернионов  $\lambda^{(k)} = \lambda^{(k)}(t_k)$  в узлах  $t_k$  сетки  $\Delta_{11} \in \{t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_{11} = T\}$ .

Плавное движение при обходе вершин двадцатичетырехячейника до их упорядочения проиллюстрировано в работе [9].

Изменение положения осей подвижной системы координат иллюстрируется движением точек на единичной двумерной сфере  $S^2$ , координаты которых заданы тройками направляющих косинусов  $(Q_{11}, Q_{12}, Q_{13})$ ,  $(Q_{21}, Q_{22}, Q_{23})$ ,  $(Q_{31}, Q_{32}, Q_{33})$ . При этом матрица направляющих косинусов в кватернионном представлении имеет вид [1]

$$\mathbf{Q}(t) = \begin{pmatrix} \lambda_0^2(t) + \lambda_1^2(t) - \lambda_2^2(t) - \lambda_3^2(t) & 2\lambda_1(t)\lambda_2(t) + 2\lambda_0(t)\lambda_3(t) & 2\lambda_1(t)\lambda_3(t) - 2\lambda_0(t)\lambda_2(t) \\ 2\lambda_1(t)\lambda_2(t) - 2\lambda_0(t)\lambda_3(t) & \lambda_0^2(t) - \lambda_1^2(t) + \lambda_2^2(t) - \lambda_3^2(t) & 2\lambda_2(t)\lambda_3(t) + 2\lambda_0(t)\lambda_1(t) \\ 2\lambda_1(t)\lambda_3(t) + 2\lambda_0(t)\lambda_2(t) & 2\lambda_2(t)\lambda_3(t) - 2\lambda_0(t)\lambda_1(t) & \lambda_0^2(t) - \lambda_1^2(t) - \lambda_2^2(t) + \lambda_3^2(t) \end{pmatrix}.$$

На рис. 2 показаны следы, оставляемые точками пересечения осей подвижной системы координат со сферой  $S^2$ , при движении твердого тела по кратчайшей траектории.

Перемещение твердого тела по кратчайшему маршруту в ориентационном пространстве осуществляется как результат последовательных поворотов на угол  $\pi/3$  вокруг осей, равнонаклоненных к осям глобальной системы координат.

### § 4. Заключение

Представлены результаты моделирования плавного движения твердого тела по кратчайшей траектории, проходящей через двенадцать точек конфигурационного пространства  $SO(3)$ , равномерно его заполняющих. При использовании сто двадцатичетырехячейника количество таких точек увеличивается до трехсот. Модели с равномерным дискретным набором возможных ориентаций могут быть использованы при решении некоторых задач управления и навигации, робототехники, компьютерной графики, вычислительной структурной биологии, астрофизики, а также при исследовании текстурообразования — возникновения преимущественной ориентации зерен поликристаллических материалов в процессе их термомеханической обработки.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Борисов А.В., Мамаев И.С. Динамика твердого тела. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. 384 с.
2. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия. Методы и приложения. Том 1. Геометрия поверхностей, групп преобразований и полей. М.: Либроком, 2013. 336 с.
3. Копытов Н.П., Митюшов Е.А. Равномерное распределение точек на гиперповерхностях: моделирование случайных равновероятных вращений // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2015. Т. 25. Вып. 1. С. 29–35. DOI: [10.20537/vm150104](https://doi.org/10.20537/vm150104)
4. Голубев Ю.Ф. Алгебра кватернионов в кинематике твердого тела // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2013. № 39. 23 с.

5. 24-cell. Wikipedia, the free encyclopedia. <https://en.wikipedia.org/wiki/24-cell>
6. Shoemake K. Animating rotation with quaternion curves // Proceedings of the 12th annual conference on computer graphics and interactive techniques (SIGGRAPH'85). ACM. New York, NY, USA. 1985. P. 245–254. DOI: [10.1145/325334.325242](https://doi.org/10.1145/325334.325242)
7. Mityushov E.A., Misyura N.E. Exact representation of the unit step function through algebraic functions. 2017. ID: 1796. <http://www.intellectualarchive.com>
8. Митюшов Е.А., Мисюра Н.Е., Жилин С.С. 3D анимация плавного движения. [https://www.youtube.com/watch?v=\\_k00jJIBqWY](https://www.youtube.com/watch?v=_k00jJIBqWY)
9. Митюшов Е.А. 3D анимация в MathCad: плавное изменение ориентации. <https://www.youtube.com/watch?v=KwqQVov83jk>

Поступила в редакцию 01.02.2017

Митюшов Евгений Александрович, д. ф.-м. н., профессор, кафедра теоретической механики, Уральский федеральный университет, 620002, Россия, г. Екатеринбург, ул. Мира, 19.  
E-mail: [mityushov-e@mail.ru](mailto:mityushov-e@mail.ru)

Мисюра Наталья Евгеньевна, старший преподаватель, кафедра теоретической механики, Уральский федеральный университет, 620002, Россия, г. Екатеринбург, ул. Мира, 19.  
E-mail: [n\\_misura@mail.ru](mailto:n_misura@mail.ru)

Берестова Светлана Александровна, д. ф.-м. н., профессор, заведующая кафедрой теоретической механики, Уральский федеральный университет, 620002, Россия, г. Екатеринбург, ул. Мира, 19.  
E-mail: [s.a.berestova@urfu.ru](mailto:s.a.berestova@urfu.ru)

**E. A. Mityushov, N. E. Misyura, S. A. Berestova**

**Smooth movement of a rigid body in orientational space along the shortest path through the uniform lattice of the points on  $SO(3)$**

**Citation:** *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2017, vol. 27, issue 1, pp. 138–145 (in Russian).

**Keywords:** discrete distribution on  $SO(3)$ , shortest paths, regular four-dimensional polytope, quaternion interpolation, Heaviside function.

MSC2010: 17B81, 20G20

DOI: [10.20537/vm170112](https://doi.org/10.20537/vm170112)

Many tasks of motion control and navigation, robotics and computer graphics are related to the description of a rigid body rotation in three-dimensional space. We give a constructive solution for the smooth movement of a rigid body to solve such problems. The smooth movement in orientational space is along the shortest path. Spherical solid body motion is associated with the movement of the point on the hypersphere in four-dimensional space along the arcs of large radius through the vertices of regular four-dimensional polytope. Smooth motion is provided by the choice of a special nonlinear function of quaternion interpolation. For an analytical presentation of the law of continuous movement, we use the original algebraic representation of the Heaviside function. The Heaviside function is represented using linear, quadratic and irrational functions. The animations in the computer program MathCad illustrate smooth motion of a rigid body through the nodes of a homogeneous lattice on the group  $SO(3)$ . The algorithm allows one to change in a wide range the time intervals displacements between nodes, as well as the laws of motion on these intervals.

## REFERENCES

1. Borisov A.V., Mamaev I.S. *Dinamika tverdogo tela* (Rigid body dynamics), Izhevsk: Regular & Chaotic Dynamics, 2001, 384 p.
2. Dubrovin B.A., Fomenko A.T., Novikov S.P. *Sovremennaya geometriya. Metody i prilozheniya. Tom I. Geometriya poverkhnostei, grupp preobrazovaniy i polei* (Modern geometry — methods and applications. Part I. The geometry of surfaces, transformation groups, and fields), Moscow: Librokom, 2013, 336 p.



3. Kopytov N.P., Mityushov E.A. Uniform distribution of points on hypersurfaces: simulation of random equiprobable rotations, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2015, vol. 25, issue 1, pp. 29–35 (in Russian). DOI: [10.20537/vm150104](https://doi.org/10.20537/vm150104)
4. Golubev Yu.F. Quaternion algebra in rigid body kinematics, *Keldysh Institute of Applied Mathematics Preprint*, Moscow, 2013, no. 39, pp. 1–23 (in Russian).
5. 24-cell. Wikipedia, the free encyclopedia. <https://en.wikipedia.org/wiki/24-cell>
6. Shoemake K. Animating rotation with quaternion curves, *Proceedings of the 12th annual conference on computer graphics and interactive techniques (SIGGRAPH'85)*, ACM, New York, NY, USA, 1985, pp. 245–254. DOI: [10.1145/325334.325242](https://doi.org/10.1145/325334.325242)
7. Mityushov E.A., Misyura N.E. Exact representation of the unit step function through algebraic functions, 2017, ID: 1796. <http://www.intellectualarchive.com>
8. Mityushov E.A., Misyura N.E., Zhilin S.S. The 3D animation of a smooth motion. [https://www.youtube.com/watch?v=\\_k00jJIBqWY](https://www.youtube.com/watch?v=_k00jJIBqWY)
9. Mityushov E.A. 3D animation in the MathCad: Smooth change of orientations. <https://www.youtube.com/watch?v=KwqQVov83jk>

Received 01.02.2017

Mityushov Evgenii Aleksandrovich, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Department of Theoretical Mechanics, Ural Federal University, ul. Mira, 19, Yekaterinburg, 620002, Russia.

E-mail: [mityushov-e@mail.ru](mailto:mityushov-e@mail.ru)

Misyura Natal'ya Evgen'evna, Senior Lecturer, Department of Theoretical Mechanics, Ural Federal University, ul. Mira, 19, Yekaterinburg, 620002, Russia.

E-mail: [n\\_misura@mail.ru](mailto:n_misura@mail.ru)

Berestova Svetlana Aleksandrovna, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Head of the Department of Theoretical Mechanics, Ural Federal University, ul. Mira, 19, Yekaterinburg, 620002, Russia.

E-mail: [s.a.berestova@urfu.ru](mailto:s.a.berestova@urfu.ru)